MATIÈRES À OPTION

Mathématiques (Physique et Chimie, Biologie)

DURÉE : 3 heures

MATHÉMATIQUES

Dans tout le problème, x désigne un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.

On associe à x les suites x_p , n_p , finies ou non, déterminées de la manière suivante :

— on pose $x_1 = x$;

— n_1 est le plus petit des entiers n tels que $\frac{1}{n} \leqslant x_1$;

— on pose $x_2 = x_1 - \frac{1}{n_1}$.

Si $x_2 = 0$, la construction est terminée.

Sinon on recommence suivant la même méthode :

— n_p est le plus petit des entiers n tels que $\frac{1}{n} \leqslant x_p$;

— on pose $x_{p+1} = x_p - \frac{1}{n_p}$.

Si $x_{p+1} = 0$, la construction des suites est terminée.

Sinon on continue.

1° Montrer que si la suite (n_p) associée à x est finie, x est rationnel. On appellera alors « développement de x » l'égalité

$$x = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{n_p} \tag{1}$$

où N est le nombre des termes de la suite n_p .

2° On suppose x rationnel. Montrer qu'il existe deux suites d'entiers strictement positifs r_p , s_p , vérifiant, pour tout p tel que n_p est défini, les relations suivantes :

$$x_p = \frac{r_p}{s_p} \quad ; \quad s_p = s_{p-1} \cdot n_{p-1} \quad ; \quad r_p < r_{p-1} .$$

En déduire que si x est rationnel, les suites associées à x sont finies, et x admet ainsi un développement fini de la forme donnée par l'équation (1).

3° Former les développements des nombres suivants :

$$x = \frac{6}{7} \qquad x = \frac{41}{56} .$$

On suppose x irrationnel dans toute la suite du problème.

4° Montrer que la suite $(n_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ associée à x est strictement croissante.

5° Montrer que la série dont le terme général est

$$u_p = \frac{1}{n_p}$$

converge, et que

$$x = \sum_{p=1}^{\infty} u_p .$$

L'égalité

$$x = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n_p} \tag{2}$$

sera, comme lorsque x est rationnel, appelée « développement de x ».

. . . / . . .

INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE 1977

x167x

6° (Cette question est indépendante de la suite du problème.)

Prouver, en utilisant la question précédente, que l'ensemble des entiers naturels qui ne sont pas des valeurs de la suite (n_p) est infini.

7° Soit $(m_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m_k}$ converge, et telle que $m_1 \geqslant 2$.

Soit y sa somme et $R_p = y - \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{m_k}$.

a. Montrer que la relation

$$y = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m_k} \tag{3}$$

est le développement de y si et seulement si l'on a

$$\forall p \geqslant 1 \quad , \quad R_p < \frac{1}{m_p(m_p-1)}$$

b. Montrer que si l'on a :

$$\forall p \geqslant 1 \quad , \quad m_{p+1} \geqslant (m_p)^2$$

alors la relation (3) est le développement de y.

On rappelle la relation $\frac{\pi^2}{6} - 1 = \sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2}$.

Cette égalité donne-t-elle le développement de $x = \frac{\pi^2}{6} - 1$?

8° Le développement de x étant donné par la formule (2);

a. Quel est le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{t^{(n_p)}}{n_p}$$

b. Montrer que l'on a

$$\forall p \geqslant 2 \qquad n_p \geqslant 1 + 2^{(2^{p-2})} = a_p.$$

c. Montrer que le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{t^p}{n_p} \quad \text{est infini.}$$

Les questions qui suivent sont des applications des résultats prouvés aux questions 2°, 5°, 7°.

9° On donne : $\sqrt{2} = 1{,}414\,214 \pm 5.10^{-7}$.

Calculer les trois premiers termes du développement de $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Majorer l'écart entre x et la somme de ces trois termes.

Majorer, sans chercher à calculer *exactement* le 4e terme, l'écart entre x et la somme des quatre premiers termes de son développement.

10° *a.* Montrer que la série $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{2^{(2^p)}}$ converge et que sa somme n'est pas un nombre rationnel.

b. Soit a un entier strictement supérieur à 1.

Donner une condition suffisante sur la fonction $\varphi_{(p)}$ à valeurs entières positives pour que la série

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\varphi(p)}}$$

converge vers un nombre irrationnel.

c. Montrer que la série

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{a_p^{[(a_p)^p]}}$$

converge vers un nombre irrationnel lorsque la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens large et que l'on a $a_1 \geqslant 2$.

FIN

X 1683

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail